Variables aléatoires discrètes

Table des matières

1 Variables aléatoires réelles discrètes

1.1 Définitions

Définition 1.1 : *Variable aléatoire réelle discrète*

On appelle **variable aléatoire réelle discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application

$$\begin{array}{rccc} X : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

telle que $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable et pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$[X = x] \in \mathcal{A}.$$

L'ensemble $[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$ est un événement, c'est l'événement *"X prend la valeur x"*.

Définition 1.2 : *Rappel : support d'une variable aléatoire*

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'ensemble des valeurs prises par X est noté

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \text{ avec } \omega \in \Omega\}.$$

$X(\Omega)$ est appelé **le support de** X ou **l'univers image de** X.

(i) Si $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une **variable aléatoire finie** et on notera généralement

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

(ii) Si $X(\Omega)$ est infini, on dit que X est une **variable aléatoire discrète infinie** et on notera généralement

$$X(\Omega) = \{x_i \text{ avec } i \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exemple 1. *Il existe d'autres variables aléatoires que les variables aléatoires discrètes, appelées variables aléatoires à densité :*

- *La variable aléatoire X égale à la taille d'une personne dans une ville donnée ou dans un pays donné.*
- *La variable aléatoire X égale à la durée de fonctionnement d'une ampoule électrique exprimée en heures.*

Proposition 1.3 : *Evénements liés aux variables aléatoires*

Si X est une variable aléatoire discrète et $x \in \mathbb{R}$, alors les ensembles suivants sont des événements de $\mathcal{A}$

$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A},$$

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}.$$

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble suivant est un événement de $\mathcal{A}$

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}.$$

Exemple 2. *Soit Ω l'ensemble des habitants en France. On définit X la variable aléatoire égale à l'année de naissance d'une personne en France, l'ensemble suivant correspond à l'événement " les personnes nées entre* 1980 *et* 2010 *" :*

$$[1980 \leq X \leq 2010].$$

1.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 1.4 : *Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète*

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **loi de probabilité** de X l'application $\mathcal{L}$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} : X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}$$

Méthode 1.5 : *Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète*

Afin de pouvoir déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète, il faudra donc déterminer d'abord son support $X(\Omega)$, puis, pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X = x)$.

On prendra garde à ne pas confondre X (variable aléatoire), $[X = x]$ (événement) et $\mathbb{P}(X = x)$ (réel).

Théorème 1.6 : *Système complet associé à une variable aléatoire discrète*

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forme une partition de Ω. Par conséquent,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\left(X = x\right) = 1.$$

Cette famille est appelée **système complet d'événements associé à la variable aléatoire** X.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du chapitre Variables aléatoires finies. □

(i) Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X est

$$\left([X = x_1], [X = x_2], \dots, [X = x_n]\right)$$

(ii) Si X est une variable aléatoire discrète infinie telle que $X(\Omega) = \{x_i \text{ avec } i \in \mathbb{N}^*\}$, alors le système complet d'événements dénombrable associé à la variable aléatoire X est

$$\left([X = x_i]\right)_{i \in \mathbb{N}^*} = \left([X = x_1], [X = x_2], \dots\right)$$

De plus, le théorème 1.6 signifie que la série $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$ converge et que sa somme vaut

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) = 1.$$

Exemple 3. *Pour quelle valeur de* α *la formule :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha}{3^n}.$$

définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ *?*

Solution.

1.3 Fonction de répartition

Définition 1.7 : *Fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction réelle F_X définie par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}\left(X \leq x\right) \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x)$ donne la probabilité que la variable aléatoire X ne dépasse pas x.

Propriété 1.8 : *Fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire discrète et F_X sa fonction de répartition. La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier donc discontinue.

Exemple 4. *Si X suit une loi certaine de paramètre a, sa fonction de répartition F_X est donnée par*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < a, \\ 1, & si\ x \geq a. \end{cases}.$$

Exemple 5. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, sa fonction de répartition F_X est donnée par*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0, \\ 1-p, & si\ x \in [0,1[, \\ 1, & si\ x \geq 1. \end{cases}.$$

Proposition 1.9 : *Fonction de répartition*

Soient X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. On a pour tout $a < b$,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Démonstration. Pour tout $a < b$,

$$[a < X \leq b] = [X \leq b] \setminus [X \leq a],$$

donc

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a).$$

□

Corollaire 1.10 : *Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète à sa loi*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ (i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$). Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Proposition 1.11 : *Ecriture de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète*

Soit X une variable aléatoire discrète. Sa fonction de répartition F_X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{t \in X(\Omega) \\ t \leq x}} \mathbb{P}(X = t).$$

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$[X \leq x] = \bigcup_{\substack{t \in X(\Omega) \\ t \leq x}} [X = t].$$

Cette union étant disjointe, on obtient le résultat attendu. □

Théorème 1.12 : *Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète*

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi de probabilité} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ont même fonction de répartition.}$$

On dira alors que la fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire discrète.

On peut donc définir directement une variable aléatoire discrète grâce à sa fonction de répartition.

Démonstration. On montre l'unicité uniquement dans le cadre d'une variable aléatoire finie.
$\Rightarrow$ D'après la proposition 1.11, la loi de probabilité permet de déterminer une unique fonction de répartition.
$\Leftarrow$ On pose

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{avec} \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

De la même manière que dans le corollaire 1.10, on a

$$\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1) \quad \text{et pour } i \in [\![2, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$$

Ainsi F_X est définie entièrement par sa loi et réciproquement. □

1.4 Transformation d'une variable aléatoire discrète

Définition 1.13 : *Transformation d'une variable aléatoire discrète*

Soient X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et g une fonction réelle. On note $g(X)$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} g(X) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto Y(\omega) = g(X(\omega)). \end{aligned}$$

Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Soient a et b deux réels. Si X est une variable aléatoire discrète, alors $aX + b$ est aussi une variable aléatoire discrète. Il en est de même pour X^2, e^X...

Exemple 6. *Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On pose*

$$Y = 2X \quad \text{et} \quad Z = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } X \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors $Y(\Omega) = \{2k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\}$ est infini alors que $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ est fini.

Proposition 1.14 : *Formule de transfert de loi (hors programme)*

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La loi de $Y = g(X)$ est donnée par

$$Y(\Omega) = g\left(X(\Omega)\right) \quad \text{et} \quad \forall y \in Y(\Omega),\, \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 7. *On reprend les variables aléatoires X, Y et Z de l'exemple précédent avec*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}.$$

Déterminer la loi de Y et de Z.

Solution.

1.5 Moments d'une variable aléatoire discrète

1.5.1 Espérance

Définition 1.15 : *Espérance d'une variable aléatoire finie*

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. **L'espérance de** X est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbb{P}\left(X = x_i\right).$$

Les variables aléatoires finies ont toujours une espérance.

Définition 1.16 : *Espérance d'une variable aléatoire discrète infinie*

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$. On dit que

$$X \text{ admet une espérance} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \geq 1} x_i\, \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \text{ converge absolument.}$$

Dans ce cas, **l'espérance de** X est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i\, \mathbb{P}(X = x_i).$$

Pour une variable aléatoire discrète infinie, il faut donc prouver que l'espérance existe avant de la calculer.

Exemple 8. *Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}.$$

Montrer que X possède une espérance et calculer cette espérance.

Solution.

Exemple 9. *Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \left\{2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\right\}$ et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = 2^k) = \frac{1}{2^k}.$$

Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Solution.

Théorème 1.17 : *Théorème de transfert (variable aléatoire finie)*

Soient X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et g une fonction réelle. L'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i).$$

Théorème 1.18 : *Théorème de transfert (variable aléatoire discrète infinie)*

Soient X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ et g une fonction réelle. Alors

$$g(X) \text{ admet une espérance} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \geq 1} g(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i) \text{ converge absolument.}$$

Dans ce cas, l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i).$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 10 (Paradoxe de Saint-Pétersbourg)**.** *Le paradoxe de Saint-Pétersbourg est un paradoxe probabiliste qui décrit une situation où une variable aléatoire n'a pas d'espérance. Le problème a été énoncé en* 1713 *par Nicolas Bernoulli, et discuté en* 1738 *dans les Transactions de l'Académie de Saint-Petersbourg par son cousin Daniel Bernoulli (neveu de Jacques Bernoulli, qui a donné son nom à la loi de Bernoulli).*

Imaginons un jeu de pile ou face, où un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir "face". Lorsqu'il obtient pour la première fois "face" après n tirages, la banque lui verse 2^n euros.

Quelle doit être la mise initiale du joueur pour que ni la banque, ni le joueur ne soit avantagé par le jeu ?

Solution.

Le paradoxe réside dans le fait qu'il serait rationnel, si le gain seul importait, d'offrir de miser la totalité de ses biens pour pouvoir jouer à ce jeu dont on vient de voir qu'il offrait une espérance de gain infinie (donc bien supérieur à n'importe quelle mise), et que pourtant personne, observe Daniel Bernoulli, ne ferait une chose pareille.

Propriété 1.19 : *Linéarité*

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance et a, b des réels, alors $aX + bY$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\,\mathbb{E}(X) + b\,\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration. Admis. □

Propriété 1.20 : *Croissance de l'espérance*

Si X est une variable aléatoire discrète prenant des valeurs positives (i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$) et admettant une espérance, alors

$$\mathbb{E}(X) \geq 0.$$

Propriété 1.21 : *Croissance de l'espérance*

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance telles que

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq Y(\omega),$$

alors

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

Les démonstrations de ces propriétés sont similaires à celles du chapitre Variables aléatoires finies.

Propriété 1.22 : *Existence d'une espérance par domination*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que

$$\forall \omega \in \Omega,\ 0 \leq |X(\omega)| \leq Y(\omega).$$

Si Y admet une espérance alors X admet également une espérance et

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration. Admis. □

Définition 1.23 : *Variable aléatoire centrée*

On dit que X est une **variable aléatoire centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Si X une variable aléatoire discrète, alors la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

1.5.2 Variance

Définition 1.24 : *Moments d'ordre r*

Soient X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un **moment d'ordre** r lorsque X^r admet une espérance. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

L'espérance d'une variable aléatoire discrète est donc son moment d'ordre 1.

(i) Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors X admet des moments de tout ordre et d'après le théorème de transfert pour $r \in \mathbb{N}$,

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \, \mathbb{P}\left(X = x_i\right).$$

(ii) Si X est une variable aléatoire discrète infinie telle que $X(\Omega) = \{x_i \text{ avec } i \in \mathbb{N}^*\}$, alors d'après le théorème de transfert pour $r \in \mathbb{N}$,

$$X \text{ admet un moment d'ordre } r \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \geq 1} x_i^r \, \mathbb{P}(X = x_i) \text{ converge absolument.}$$

Dans ce cas, le moment d'ordre r de X est défini par

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^r \, \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemple 11. *Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \left\{2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\right\}$ et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = 2^k) = \frac{7}{8^k}.$$

Montrer que X admet des moments d'ordre 1 et 2, mais pas de moment d'ordre 3.

Solution.

Proposition 1.25 : *Existence de moments d'ordre inférieur*

Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre r, alors

— X admet des moments à tout ordre inférieur ou égal à r.

— X admet un moment centré d'ordre r.

Démonstration. Admis □

Définition 1.26 : *Variance, écart-type*

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2. On appelle **variance** de X

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right),$$

et **écart-type** de X

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)},$$

La variance d'une variable aléatoire est son moment centré d'ordre 2, elle mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Propriété 1.27 : *Variance*

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2. Alors :

(i) (Positivité) $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

(ii) (Variance nulle) $\mathbb{V}(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

(iii) (Transformation affine) Si $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \, \mathbb{V}(X)$.

Démonstration. À faire en exercice à l'aide du théorème de transfert. □

Théorème 1.28 : *Formule de Koenig-Huygens*

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du chapitre Variables aléatoires finies. □

Exemple 12. *Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \left\{2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\right\}$ et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = 2^k) = \frac{7}{8^k}.$$

Vérifier que X admet une variance et calculer $\mathbb{V}(X)$.

Solution.

Définition 1.29 : *Variable aléatoire réduite*

On dit que X est une **variable aléatoire réduite** si $\mathbb{V}(X) = 1$.

Propriété 1.30 : *Variable aléatoire centrée réduite associée*

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2. Si $\mathbb{V}(X) \neq 0$, alors on note

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

La variable aléatoire X^* est appelée la **variable aléatoire centrée réduite associée à** X.

2 Lois discrètes usuelles

Nous avons déjà vu des lois discrètes usuelles finies : loi certaine, loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, loi uniforme $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$. Nous allons voir maintenant deux lois de référence discrètes infinies.

2.1 Loi géométrique

Définition 2.1 : *Loi géométrique*

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** p avec $0 < p < 1$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p\,(1-p)^{k-1}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 13. *Vérifier que l'on a bien* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Solution.

Proposition 2.2 : *Espérance et variance*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration. La série $\sum_{k\geq 1} k\, p\,(1-p)^{k-1}$ converge absolument d'après le critère sur les séries géométriques dérivées d'ordre 1 et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, p\,(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} k\,(1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

De même, la série $\sum_{k\geq 1} k^2\, p\,(1-p)^{k-1}$ converge et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\, p\,(1-p)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (k(k-1)+k)\, p\,(1-p)^{k-1} \\
&= \left(p\,(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\,(1-p)^{k-2}\right) + \mathbb{E}(X) \\
&= \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

On a donc d'après la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

□

Méthode 2.3 : *Situation caractéristique*

Soit une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles, succès de probabilité p ou échec. X désigne le nombre de fois où cette expérience a été répétée dans des conditions identiques et indépendantes jusqu'à obtenir le premier succès.

On dit que X est le temps d'attente du premier succès (*i.e.* le numéro du tirage qui amène le premier succès).

Exemple 14. *Le temps d'attente du premier pile obtenu lors de lancers successifs d'une pièce suit une loi géométrique* $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exemple 15. *On lance une infinité de fois dans des conditions identiques une pièce de monnaie truquée qui donne Pile avec une probabilité* $\frac{1}{3}$. *On note X le rang d'apparition du premier Pile.*

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un Pile lors des* 6 *premiers lancers ?*

Solution.

Proposition 2.4 : *Fonction de répartition*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left(X \leq n\right) = 1 - (1-p)^n.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$[X \leq n] = \bigcup_{k=1}^{n} [X = k].$$
Cette union étant disjointe, on a
$$\mathbb{P}\left(X \leq n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X = k\right) = \sum_{k=1}^{n} p\,(1-p)^{k-1} = p \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i = 1 - (1-p)^n \quad \text{avec } i = k-1.$$
Pour $n = 0$, on a bien $\mathbb{P}\left(X \leq 0\right) = 0 = 1 - (1-p)^0$. □

Nous avons jusqu'à présent interprété une loi géométrique comme le temps d'attente du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes. Si un observateur commence son observation au temps t et qu'il constate que l'événement ne s'est pas encore produit, quelle est la probabilité que l'événement se produise au temps $t+s$? Elle est en fait égale à la probabilité que l'événement se produise au temps s, comme si rien ne s'était produit jusque là. La loi géométrique est qualifiée de **loi sans mémoire**.

Proposition 2.5 : *Absence de mémoire de la loi géométrique*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors pour tout $(s,t) \in \mathbb{N}^2$,
$$\mathbb{P}_{[X>t]}\left(X > t+s\right) = \mathbb{P}\left(X > s\right).$$

Démonstration. D'après la proposition 2.4, pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n) = (1-p)^n.$$
Comme $[X > t+s] \subset [X > t]$, alors $[X > t+s] \cap [X > t] = [X > t+s]$ et donc
$$\mathbb{P}_{[X>t]}\left(X > t+s\right) = \frac{\mathbb{P}\left(X > t+s\right)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{(1-p)^{t+s}}{(1-p)^t} = (1-p)^s = \mathbb{P}(X > s).$$
□

2.2 Loi de Poisson

Définition 2.6 : *Loi de Poisson*

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda > 0$ si
$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$
On notera $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple 16. *Vérifier que l'on a bien* $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Solution.

Proposition 2.7 : *Espérance et variance*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors
$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration. La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge absolument en tant que série exponentielle et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = \lambda \qquad \text{avec } i = k-1.$$

De même, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} k^2\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) \\
&= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right) = e^{-\lambda} \left(\lambda^2\, e^{\lambda} + \lambda\, e^{\lambda} \right) = \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

On a donc d'après la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Il n'y a pas de modèle simple pour la loi de Poisson, celle-ci est systématiquement donnée par l'énoncé.

Remarque 2.8 : *Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson*

La loi de Poisson est une loi limite (nous y reviendrons dans le chapitre Convergences et approximations) : quand n est grand et p petit, si X suit $\mathcal{B}(n, p)$, alors X suit approximativement $\mathcal{P}(np)$.

Méthode 2.9 : *Situation caractéristique*

On s'intéresse à un grand nombre d'événements aléatoires indépendants. On observe qu'ils se produisent λ fois en moyenne durant un intervalle de temps donné. La loi de Poisson indique la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ que l'événement se produise seulement k fois exactement durant cette période.

Pour la culture, cette loi fut publiée par Siméon Denis Poisson en 1837, dans son ouvrage Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, où il l'utilise pour mesurer le nombre de condamnations injustifiées dans un pays durant une certaine période.

Exemple 17. *Le nombre de clients qui se présentent à un guichet un jour donné est souvent modélisé par une loi de Poisson.*

2.3 Simulation des lois usuelles

Informatique 2.10 : *Python : simulation des lois usuelles*

Pour une implémentation en Python, on commence par

```
import numpy.random as rd
```

— On suppose que $p \in]0,1[$ a été implémenté préalablement en Python. Pour obtenir une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, on peut utiliser la fonction

```
X=rd.geometric(p)
```

— On suppose que $r \in \mathbb{R}_+^*$ a été implémenté préalablement en Python. Pour obtenir une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi Poisson de paramètre r, on peut utiliser la fonction

```
X=rd.poisson(r)
```

Exemple 18. *On peut simuler* 40 *fois une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre* $p = 0.3$. *On stocke les résultats dans la liste* A.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
p=0.3
A=np.zeros(41)
for k in range(0,41):
    A[k]=rd.geometric(p)
print(A)
```

Voici ce que renvoie Python

[3.7.5.2.3.4.4.4.2.1.9.1.1.10.3.5.1.2.1.5.12.3.4.1.1.8.2.2.1.5.1.3.3.3.3.1.6.2.4.2.1.]

Exemple 19. *On peut simuler* 10 *fois une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre* $r = 6$*. On stocke les résultats dans la liste* A*.*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
r=6
A=np.zeros(11)
for k in range(0,11):
    A[k]=rd.poisson(r)
print(A)
```

Voici ce que renvoie Python

$$[2.3.6.7.10.3.5.6.12.3.2.]$$

Exemple 20. *On peut tracer le diagramme en bâtons d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre* $r = 6$*.*

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
r=6
L=np.zeros(21) # liste pour stocker les probabilités
F=np.zeros(21) # liste pour stocker les factorielles
L[0]=np.exp(-r)
F[0]=1
for k in range(1,21):
    F[k]=k*F[k-1]
    L[k]=np.exp(-r)*(r**k)/F[k]
plt.bar(range(0,21),L,0.2)
plt.show()
```